Makine Müh. Blm. MATEMATİK – I (C-Grubu) Ara Sınavı 25.11.2013

1) $f(x)=\sqrt{20-x-x^2}+\ln\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz. (17puan)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\sqrt{x}}-1).Arc\tan 3x^2}{(1-\cos 4x).\ln(1+2\sqrt{x})}$ limitini hesaplayınız. (17 puan).

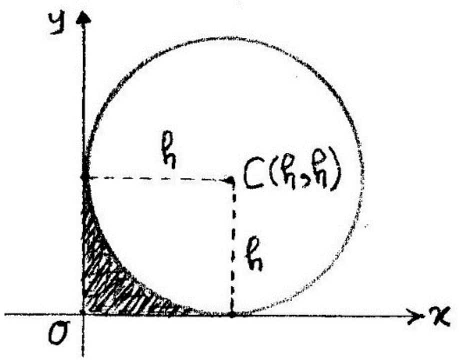
3) $f(x)=\dfrac{\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|}{x-1}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğin türünü belirtiniz. (17 puan).

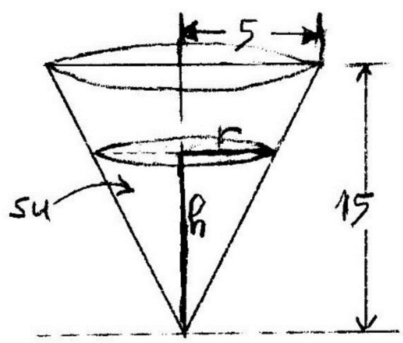
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+4}\right)^{3x^2}$ limitini hesaplayınız.

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{2/3}-a^{2/3}}{x-a}$ limitini hesaplayınız. (17 puan).

6) a) (h,h) merkezli, h yarıçaplı çember, $Ox-ekseni$ ve $Oy-ekseni$ ile sınırlı düzlemsel bölgenin alanını h nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz. (8 puan).

b) Taban yarıçapı 5 dm ve yüksekliği 15 dm olan sacdan yapılmış bir konik kap ters çevrilerek köşesi aşağıda, tabanı yukarıda olan bir su tankı oluşturuluyor. Tankın içi su ile dolduruluyor. Suyun hacmini suyun derinliğinin fonksiyonu olarak ifade ediniz. (8 puan).





NOT: Limit sorularında L'Hospital kuralı uygulanmayacaktır. Arkadaki sayfaları 1'den 7'ye kadar numaralandırınız ve her bir soruyu o sorunun numarasına karşılık gelen sayfada çözünüz. Sayfaya sığmayan çözümünüz olursa yedinci sayfada devam edebilirsiniz. Süre 75 dakikadır.

(1) $20 - x - x^2 \geqslant 0$ olmalı ve $\dfrac{x}{x+1} > 0$ olmalı

$$\begin{matrix} 20 & - x & - x^2 \\ 5 \;\; 4 & & x \;\; -x \end{matrix}$$

$(5+x)(4-x) \geqslant 0$

$x_1 = -5,\; x_2 = 4$

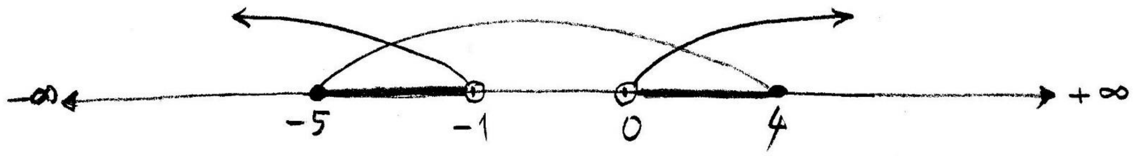
x		-5		4	
$20-x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$T.A_1 = [-5, 4]$

$x_3 = 0$ ve $x_4 = -1$

x		-1		0	
$\dfrac{x}{x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$T.A_2 = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$



$T.A. = T.A_1 \cap T.A_2 = [-5, -1) \cup (0, 4]$ bulunur.

---

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sqrt{x}}-1)\cdot \operatorname{Arctan} 3x^2}{(1-\cos 4x)\cdot \ln(1+2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sqrt{x}}-1)\cdot \operatorname{Arctan} 3x^2}{(2\sin^2 2x)\cdot \ln(1+2\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\cdot \dfrac{\operatorname{Arctan} 3x^2}{3x^2}\cdot 3x^2}{2\cdot\dfrac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot(2x)^2\cdot\dfrac{\ln(1+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}}^{=1 \text{ (öz. lim.)}}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} 3x^2}{3x^2}}^{=1 \text{ (özel limit)}}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}_{=1^2=1 \text{ (özel limit)}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}_{=1 \text{ (öz. lim)}}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\cdot 3\cancel{x^2}}{2\cdot 4\cancel{x^2}\cdot 2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 2} = \frac{3}{16}$$

bulunur.

(3) $f(1) = \dfrac{|\cos\frac{\pi}{2}|}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ tanımsız olduğundan $x=1$ de süreksiz.

Önce mutlak değeri dafa farklı yazarsak; $f(x) = \dfrac{|\cos\frac{\pi}{2}x|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}, & x<1 \text{ ise} \\ \dfrac{-\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}, & 1<x \text{ ise} \end{cases}$

soldan limit:

$$f(1-0) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{-\frac{\pi}{2}(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot \underbrace{\lim_{x\to1^-} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}_{=1 \text{ (özel limit)}} = -\frac{\pi}{2}\cdot 1 = -\frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

sağdan limit:

$$f(1+0) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{|\cos\frac{\pi}{2}x|}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{-\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{+\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{1-x} =$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{\pi}{2}\underbrace{\lim_{x\to1^+} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}_{=1 \text{ (öz. lim.)}} = \frac{\pi}{2} \text{ bulunur}$$

$x=1$ de soldan ve sağdan farklı, sonlu limitler vardır, $x=1$ de fonksiyonun sonlu sıçramalı süreksizliği vardır.

(4)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2+4}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+4-3}{2x^2+4}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-3}{2x^2+4}\right)^{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{2x^2+4}\right)^{\frac{2x^2+1}{-3}}\right]^{\frac{-3}{2x^2+4}\cdot 3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+4}{-3}}\right]^{\frac{-9x^2}{2x^2+4}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-3}{2x^2+4}\right)^{\frac{2x^2+4}{-3}}\right]^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9x^2}{2x^2+4}}=e^{-\frac{9}{2}}$$

bulunur.

---

(5)

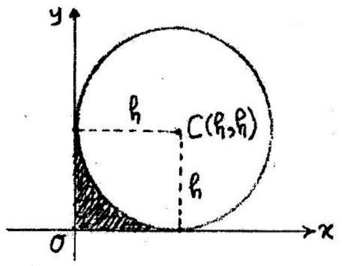
$$\lim_{x\to a}\frac{x^{2/3}-a^{2/3}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{2/3}\cdot\left(\frac{x^{2/3}}{a^{2/3}}-1\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\lim_{x\to a}\frac{a^{2/3}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}-1\right]}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}$$

$$=\frac{a^{2/3}}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\left[\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)^{2/3}-1\right]}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{a}-1=t\\ x\to a\Rightarrow t\to 0\end{array}\right\}=a^{\frac{2}{3}-1}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{2/3}-1}{t}$$

$$=a^{\frac{2}{3}-1}\cdot\underbrace{\lim\frac{(1+t)^{2/3}-1}{t}}_{=\frac{2}{3}\ \text{(öz. lim.)}}=\frac{2}{3}\cdot a^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}a^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$$

dır

6 a)

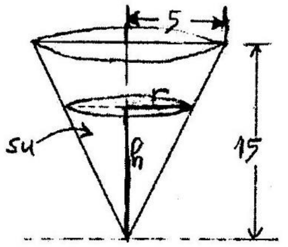


aranılan alan kenar uzunluğu h birim olan karenin alanından, h yarıçaplı dörtte bir dairenin alanının çıkarılmasıyla elde edilir. Buna göre aranılan taralı alan:

$$\text{Alan}=A(h)=h^2-\frac{\pi/2}{2\pi}\cdot(\pi\cdot h^2)=h^2-\frac{1}{4}\pi\cdot h^2=\underline{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)h^2}\ \text{br}^2\text{dir.}$$

---

6 b)



$V_{koni}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$ dir. r'yi de h türünden ifade etmek istersek, benzerlikten

$\frac{r}{h}=\frac{5}{15}$ den $\frac{r}{h}=\frac{1}{3}\Rightarrow r=\frac{h}{3}$ dür.

O halde $V(h)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{h}{3}\right)^2\cdot h=\pi\cdot\frac{h^3}{27}$ br^3

veya $\underline{V(h)=\pi\left(\frac{h}{3}\right)^3}$ br^3 bulunur.